5次元多様体上のSO(3)-作用について (変換群とコホモロジー論)

中西, あい子

数理解析研究所講究録
246巻 1975年 14-29

5次元多様体上のSO(3)-作用について

津田塾大　　中西あい子

§.0 準備

§.0で準備を、§.1で得られた結果を、§.2以降でその証明を与えることにする。

0.1 SO(3)の部分群について

本論文では、SO(3)-多様体を取り扱うので、先ずSO(3)の部分群について知らなければならない。ところが、SO(3)は次の7つの部分群、及びその共役類以外に部分群をもたないことがわかっている。([4],[5]参照)

① $S^1 \approx SO(2)$　② $N \approx O(2)$　③ 巡回群 $\mathbb{Z}_n$

④ 正2面体群 D_n　⑤ 正4面体群 $H_T \approx A_4$

⑥ 正8面体群 $H_O \approx S_4$　⑦ 正20面体群 $H_I \approx A_5$

A_4, S_4, A_5 は各々、4次の交代群、4次の対称群、5次の交代群を示す。

0.2. スライス表現について

Gをコンパクト Lie 群、Mを可微分G-多様体とする。スライス定理から、Mの各点xの orbit Gxの管状近傍におけるGの作用を調べるには、表現 $G_x \xrightarrow{homo.} GL(S_x)$ を調べれば十分であることがわかる。G_xはxの isotropy 群，S_xはスライスをあらわす。更にMがコンパクト可微分G-多様体のとき、MはG-不変計量をもつから、このスライス表現は、$G_x \longrightarrow O(n)$ と考えればよい。(nはスライスの次元)

次に示す表は、Gを$SO(3)$，Mを5次元の向きづけられた連結な可微分閉多様体とし、Mには可微分$SO(3)$作用がはいっている場合の、スライス表現と、各場合の principal orbit type を記したものである。またG_xとして存在し得るものは、0.1 に示した通り。

G_x	S_x	表現	principal orbit type
e	D^2	trivial (eは単位元)	e
$SO(3)$	D^5	① $\rho \oplus \theta^2$，ρ; $\mathbb{R}^3$上の standard $SO(3)$-action θ^2; $\mathbb{R}^2$上の trivial action	(S^1)
		② weight 2 の表現 ([1]参照)	(D_{2n})
		③ trivial	$SO(3)$
(S^1)	D^3	$S^1 \longrightarrow O(3)$	$(\mathbb{Z}_n)$

		$\begin{bmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta, & 0 \\ \sin\theta, & \cos\theta, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos n\theta, & -\sin n\theta, & 0 \\ \sin n\theta, & \cos n\theta, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$	
(N)	D^3	① S^1がtrivialに作用する場合 $N/S^1 \approx \mathbb{Z}_2$ だから $\mathbb{Z}_2$ の $O(3)$ への表現を考える。	(S^1)
		② S^1がnon-trivialに作用する場合	(D_n)
		③ trivial	(N)
$(\mathbb{Z}_n)$	D^2	① $\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_q \hookrightarrow SO(2)$, $n=mq$ $\mathbb{Z}_q$のD^2への作用は、D^2の点を(r, γ)であらわしたとき、$\xi(r, \gamma) = (r, \gamma + \nu\xi)$ $\xi = \frac{2\pi}{q}$, $(q, \nu) = 1$, $0 < \nu < q$	$(\mathbb{Z}_m)$
(D_n)	D^2	① D_n $\quad D_n/\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SO(2)$	$(\mathbb{Z}_n)$
		② D_{2k} $\quad D_{2k}/D_k = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SO(2)$	(D_k)
		③ trivial	(D_n)
(A_5)	D^2	① trivial $\quad$ (A_5は単純群)	(A_5)
(A_4)	D^2	① A_4 $\quad A_4/V_4 = \mathbb{Z}_3 \hookrightarrow SO(2)$ V_4は、$(i, j)(k, l)$の形の元からなるA_4の正規部分群で、$V_4 \approx D_2$. ただし、i, j, k, lはすべて異なる.	(D_2)
		② trivial	(A_4)
(S_4)	D^2	① S_4 $\quad S_4/A_4 = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SO(2)$	(A_4)

		② trivial	(S_4)

0.3 軌道空間M^*の向きについて.

Mは、0.2の後半に示したような5次元の向きづけられた可微分SO(3)-多様体とする。このとき、Stiefel-Whitney類W_1を調べて、principal isotropy群として(N)があらわれないことがわかる。また、N以外のprincipal isotropy群Hに関しては、$SO(3)/H$は向きづけ可能な多様体となる。故に、M^*が向きづけ不可能となる可能性のあるのは、$N(H)/H$のM^Hへの作用、及びスライス表現を調べることにより$H=(S^1)$の場合だけであることが証明できる。M^*が向きづけ可能な時、M^*と$SO(3)$の向きがMの向きを与えるようにM^*を向きづけるものとする。ここに、$N(H)$はHの正規化群、M^HはHで止まっているMの点の集合とする。

§1. 結果

Mを、5次元、向きづけられた連結な可微分閉多様体とし、Mには可微分SO(3)作用がはいっているものとする。そして、このような多様体M, M'の間に、equivariant diffeomorphism φ $(\varphi(x\circ g)=\varphi(x)\circ g)$ が存在して、それが軌道空間M^*, M'^*

の向きを保つ写像φ_*を誘導するとき、MとM'は同値であると定める。ただし、M^*が向きづけ可能多様体である場合に限る。 この同値関係によって、上のような5次元$SO(3)$-多様体を分類すると、principal orbit type が e, A_4, A_5, S_4 のとき、次に記す定理を得る。定理1〜3においてMは上に記したような多様体であるものとする。

定理1

principal isotropy 群が e のとき、Mは次の(i)(ii)を満たす数 $\{b;(g,f,m);(\alpha_1,\beta_1),\cdots\cdots,(\alpha_r,\beta_r)\}$ によって分類される。

(i) $f>0$ ならば $b=0$, $m\geqq 0$, $f=0$ ならば $b\in\mathbb{Z}_2$, $m=0$

(ii) $(\alpha_i,\beta_i)=1$, $0<\beta_i<\alpha_i$

定理2.

principal isotropy 群が(A_5)のとき、Mは軌道空間M^*の種数gによって分類される。このことは(S_4)のときにも成り立つ。

定理3

principal isotropy 群が(A_4)のとき、Mは(i)(ii)(iii)を満たす数

$\{g, \varepsilon, r\}$ によって分類される。

(i) $\varepsilon \in \{0, 1\}$　(ii) r は偶数　(iii) $g=0$ ならば $\varepsilon=0$

§.2. 定理1の証明

§.0.2の表から存在し得る orbit type は e, (S^1), $(\mathbb{Z}_u)$ のみである。ここで、$E=\{x \in M ; G_x = \text{巡回群}\}$, $Y=\{x \in M ; G_x = (S^1)\}$ とおく。M^* の各点 x^* の近傍は S_x/G_x で与えられるから、スライス表現をみれば、M^* が2次元のコンパクト，連結多様体となること、E の各 orbit は M で孤立していて、それ故 $E^*=E/G$ は M^* の孤立点の集合となること、そして Y^* は M^* の境界となってあらわれることが容易に調べられる。$Y=\Phi$ のとき M^* は境界がないことに注意する。更に §0.3で述べたように、M^* は向きづけ可能な多様体である。

g を M^* の種数と定める。M と M' が同値ならばたしかに $g=g'$ である。

<u>Case 1　$E \cup Y = \Phi$ のとき</u>

M は M^* 上の principal $SO(3)$- bundle であるから、M は bundle として、obstruction $b \in H^2(M^* ; \pi_1(SO(3))) \approx \mathbb{Z}_2$ で分類される。故に、M は $\{g, b(\in \mathbb{Z}_2)\}$ で分類される。M の

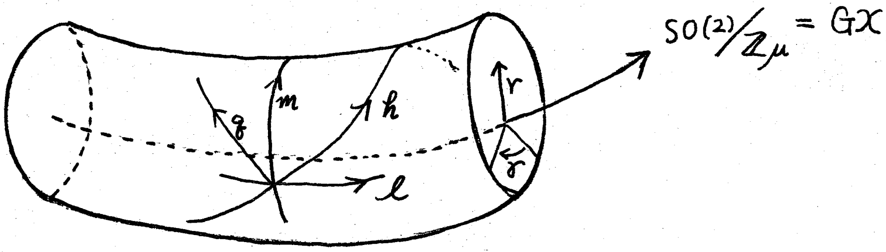
向きをかえた$-M$とMが同値であることは容易にわかる。

Case 2. $E\neq\phi$, $Y=\Phi$ のとき

Mの点xのisotropy群が$\mathbb{Z}_\mu$であるとする。このときS_xは2次元の閉円板D^2と考えられ、$\mathbb{Z}_\mu$はD^2に次のように作用していることは前に示した。(0.2)

$$\xi(r,\gamma)=(r,\gamma+\nu\xi),\quad(\mu,\nu)=1,\quad 0<\nu<\mu,\quad \xi=\frac{2\pi}{\mu}$$

orbit GXの管状近傍Vは $D^2\times_{\mathbb{Z}_\mu}SO(3)$ で、この近傍に自然にはいっている部分集合 $D^2\times_{\mathbb{Z}_\mu}SO(2)$ をUとする。



U

更に、mをスライスD^2の境界の向きづけられた曲線、lをGXとホモローグな∂U上の向きづけられた曲線とすると、順序対(m,l)は∂Uの向きを与える。また、∂Uは$(\partial V)^*=(\partial U)^*\approx S^1$上のprincipal $SO(2)$-bundleであるから、断面g: $\partial V^*\longrightarrow\partial U$が存在する。そして、$h$を$\partial U$上の向きづけられたprincipal orbitとしたとき、順序対(g,h)が(m,l)と同じ向きを与えるようにgを向きづけておく。

ファイバー空間の完全系列より、m, l は

$$m = \alpha g + \beta h, \quad l = -\nu g - \rho h, \quad \alpha = \mu,\ \beta > 0,\ \nu > 0$$

とあらわされる。また、(m, l), (g, h) が同じ向きを与えることから、$\beta\nu \equiv 1 \pmod{\alpha}$ が導かれ、断面を適当にえらんで β は $0 < \beta < \alpha$ に制限できる。また、$(\mu, \nu) = 1$ から $(\alpha, \beta) = 1$ である。

これで、E-orbit の isotropy 群，及びそのスライスへの作用から一意に定まる、上の条件をみたす整数の組 (α, β) が作られた。逆にこのような組 (α, β) が与えられれば、isotropy 群、及びそのスライスへの作用は一意に与えられる。また、(α, β) は，$m = \alpha g + \beta h$ となる断面 g を ∂V 上に、それ故 ∂V 上に一意に定めている。$-M$ では、この組は $(\alpha, \alpha - \beta)$ になる。

今、E-orbits の個数を r として、各々の管状近傍を V_i とすると、同様に、(α_i, β_i) が定められ、それは ∂V_i 上に断面 g_i を定める。この断面 $g_1, \cdots, g_r$ を $M^* - \mathrm{Int}(\bigcup_{i=1}^{r} V_i^*)$ 上に拡張する obstruction を b とすると

$$b \in H^2(M^* - \mathrm{Int}(\bigcup_{i=1}^{r} V_i^*), \bigcup_{i=1}^{r} \partial V_i^* ; \pi_1(SO(3))) \approx \mathbb{Z}_2$$

である。M と M' において $b = b'$ ということは、$\bigcup_{i=1}^{r} \partial V_i$ と $\partial(M - \mathrm{Int}(\bigcup_{i=1}^{r} V_i))$，$\bigcup_{i=1}^{r} \partial V_i'$ と $\partial(M' - \mathrm{Int}(\bigcup_{i=1}^{r} V_i'))$ のくっつき方が同値であることを示す。すなわち、このように定めた数、

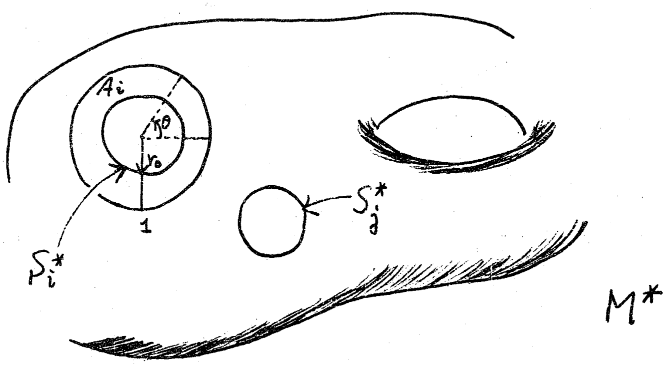
$\{g,\ b\ ;\ (\alpha_1, \beta_1),\ \cdots,\ (\alpha_r, \beta_r)\}$ がMを決定する。

ここに、$-M$ のこの obstruction は，r が偶数のときMのそれと同じで，r が奇数のとき，$\mathbb{Z}_2$の元としてもう一方の方をとる。

<u>Case 3. $E=\Phi$, $Y \neq \Phi$ のとき</u>

Yの各連結成分をS_i とすると、スライス表現とMがコンパクトであることから $S_i^* \approx S^1$ で，S_i^*はM^*の境界となっている。また、S_iはS_i^*上のファイバー $SO(3)/S^1$，構造群$N(S^1)/S^1 \approx \mathbb{Z}_2$ の bundle で、それは、trivial か non-trivial かの2種類しかない。そこで，fをYの連結成分の数，mをそのうちの non-trivial bundle になっているものの数と定める。

次に、M^*上にS_i^*を境界とする円環A_iを考え、θを増すことによって向きを与えるようにA_iの点を (r, θ)，$r_0 \leq r \leq 1$，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ であらわす。



① $S_i \longrightarrow S_i^*$ が trivial bundle のとき

たしかに $G_{s(r_0,\theta)} = S_{e_1}$ となる断面 s が存在する。ここに e_1 は $\mathbb{R}^3$ の標準基底で、S_{e_1} は e_1 を軸とした回転をあらわす。これに [6], P.417, lemma 2.6 を適用すると、s の拡張 s: $A_i \longrightarrow p^{-1}(A_i)$, $G_{s(r_0,\theta)} = S_{e_1}$, $G_{s(r,\theta)} = e$, $(r \neq r_0)$ が存在することがわかる。

② $S_i \longrightarrow S_i^*$ が non-trivial bundle のとき

$G_{s(r_0,\theta)} = S_{p_\theta}$ となる断面 s が存在する。p_θ は S^2 の点で、

$$p_\theta = \begin{cases} (\cos\theta)\, e_1 + (\sin\theta)\, e_2 & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ -e_1 & (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

S_{p_θ} は P_θ を通る軸に関する回転をあらわす。これにも、[6], lemma 2.6 を適用して、拡張した断面 s: $A_i \longrightarrow p^{-1}(A_i)$, $G_{s(r_0,\theta)} = S_{p_\theta}$, $G_{s(r,\theta)} = e$ $(r \neq r_0)$ が存在する。

また、h_θ を ① のとき、e_1 を軸とした θ の回転、② のとき、P_θ を通る軸に関する角 π の回転とし、$h_\theta \cdot s(r,\theta) = s'(r,\theta)$ で定めた断面 s' を考えると、h_θ は、$\pi_1(SO(3))$ の生成元をあらわすから、s、あるいは s' を、M^* 全体に拡張することができる。更に ① でも ② でも、$G_{s(r,\theta)} = G_{s'(r,\theta)}$ であることに注意すると、M, M' において、$\{g, f, m\} = \{g', f', m'\}$ ならば、上のようにして得られる断面から、M と M' の equivariant diffeomorfism が得られる。故に、M は、$\{g, f, m\}$

によって分類される。

<u>Case 4. $E \neq \Phi$, $Y \neq \Phi$ のとき</u>

V_i^* を E^* の各点の M^* での近傍とする。r, 及び (α_i, β_i), $i = 1, \cdots, r$ がきまれば、考えている同値関係のもとで、$\bigcup_{i=1}^{r} V_i$ は一意に定まる。また、$\bigcup_{i=1}^{r} \partial V_i^*$ 上に (α_i, β_i) により定まる断面 $g_1, \cdots, g_r$ が存在するわけだが、これらは、$M^* - Int(\bigcup_{i=1}^{f} A_i) - Int(\bigcup_{i=1}^{r} V_i^*)$ まではたしかに拡張でき、Case 3 の議論から結局それは $M^* - Int(\bigcup_{i=1}^{r} V_i^*)$ 全体に拡張できることになる。ただし、この断面は、$\bigcup_{i=1}^{f} A_i$ 上では Case 3 に示した性質をもつものである。今までの議論から、M は $\{(g, f, m);\ (\alpha_1, \beta_1), \cdots\cdots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ で分類され、$b = 0$ であることがわかる。

Case 1〜4 によって定理 1 の証明は与えられた。

§3. 定理 2 の証明

principal isotropy 群が (A_5) のとき、存在し得る type は (A_5) のみである。スライス表現を調べて、M^* が境界のない 2 次元の向きづけられた、連結、コンパクト多様体となることがわかる。また、$N(A_5)/A_5 = e$ であるから、$M = M^* \times SO(3)/A_5$

となり、Mは、M^*の種数gによって分類される。

(S_4)の場合も、存在し得る orbit type は(S_4)のみで、$N(S_4)/S_4 = e$であるから全く同様である。

§4. 定理3の証明.

存在し得る orbit type は(A_4), (S_4)のみである。

$E = \{x \in M \;;\; G_x = (S_4)\}$とおくと、$M^*$は、境界のない、向きづけ可能な、2次元、連結、コンパクト多様体で、E^*は、M^*で孤立点の集合としてあらわれる。

<u>Case 1. $E = \Phi$のとき</u>

$M^{A_4} = \{x \in M \;;\; G_x = A_4\}$とする。$M^{A_4}$は$M^*$上の$N(A_4)/A_4 \approx \mathbb{Z}_2$-bundle であるから、$M^{A_4}$は bundle としては、$M^*$の種数と、obstruction $b \in H^1(M^*;\mathbb{Z}_2)$で分類される。ところが、$\xi$, ηをM^*上の bundle とし、その obstruction を$c(\xi)$, $c(\eta)$であるとするとき、M^*の向きを保つ diffeomorphism で、$f^*(c(\eta)) = c(\xi)$となる$f : M^* \longrightarrow M^*$が存在すれば、我々が考えている同値関係のもとで$\xi$と$\eta$は同値であることになる。

故に、そのようなfを調べればよい。

① $g = 0$のとき.

$M^* \approx S^2$. 故に M^{A_4} は trivial bundle のみ。

㋺ $g=1$ のとき.

$M^* \approx T_1$, $H_1(M^* ; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の生成元を a, b としたとき. M^*の向きを保つ diffeomorphism から導かれる. 次のような $H_1(M^* ; \mathbb{Z}_2)$ の homomorphisms Δ_1, Δ_2 が存在することがわかる。

$$\Delta_1 \ ; \quad a \longmapsto b, \quad b \longmapsto a^{-1}$$

$$\Delta_2 \ ; \quad a \longmapsto ab, \quad b \longmapsto b$$

これから、M^*上の non-trivial $\mathbb{Z}_2$-bundles は、すべて同値となることがわかる。

㋩ $g=2$ のとき.

$H^1(M^* ; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の生成元を a_1, b_1, a_2, b_2 としたとき. 同様に. M^*の向きを保つ diffeomorphism から導かれる homomorphisms Δ_1, Δ_2 が考えられる。

$$\Delta_1 \ ; \quad a_1 \longrightarrow a_2^{-1} b_1, \quad b_1 \longrightarrow a_1^{-1}, \quad a_2 \longrightarrow a_1^{-1} b_2, \quad b_2 \longrightarrow a_2^{-1}$$

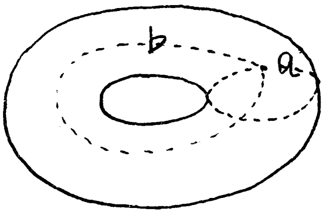
$$\Delta_2 \ ; \quad a_1 \longrightarrow a_1 b_1, \quad b_1 \longrightarrow b_1, \quad a_2 \longrightarrow a_2, \quad b_2 \longrightarrow b_2$$

そして、Δ_1, Δ_2 の合成、$\varphi_1 = \Delta_1^3$, $\varphi_2 = \Delta_2$, $\varphi_3 = \Delta_1 \Delta_2 \overrightarrow{\Delta_1^{-1} \Delta_2} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_1^{-1}$

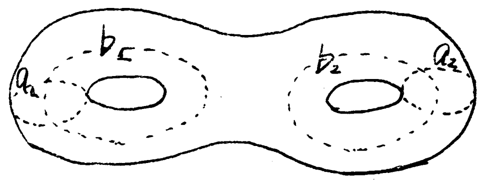
$\varphi_4 = \Delta_1 \varphi_3$ により、M^*上の non-trivial $\mathbb{Z}_2$-bundles は. すべて同値になる。

㊁ $g \geqq 3$ のとき

$g=2$ のときの homomorphisms を適当に使って、同じ結果が得られる。



$g=1$



$g=2$

①〜㊂より、Mは、$\{g, \varepsilon\}$で分類されることがいえる。ここに、εはM^{A_4}が trivial bundle、それ故、Mが trivial bundle のとき0、そうでないとき1をあらわすものとする。

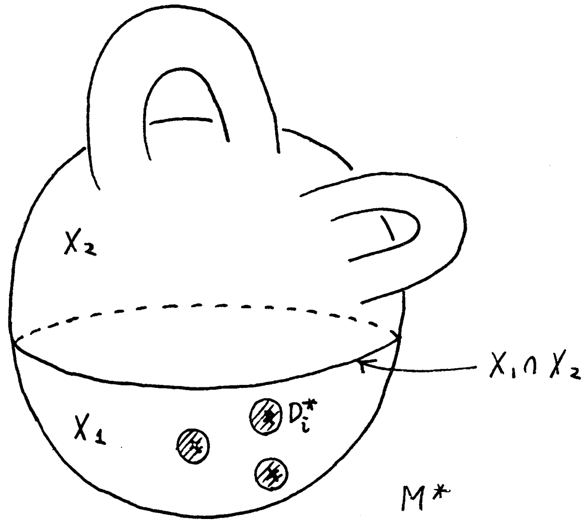
Case 2. $E \neq \emptyset$ のとき

E^*の点x^*の近傍は、$S_x/G_x = D^2/S_4 \approx D^2$である。$S_4$の$S_x$への作用はスライス表現の表を参照。更に、$E^*$の各点$x_i^*$の近傍$D_i^*$において、$(p^{-1}(D_i^*))^{A_4} \approx S_x \approx D^2$であり、$(p^{-1}(\partial D_i^*))^{A_4} \longrightarrow \partial D_i^*$が non-trivial $\mathbb{Z}_2$-bundle であることも容易にわかる。今、$M^* - \mathrm{Int}(\bigcup_{i=1}^{r} D_i^*)$は下図に示すように$X_1, X_2$にわけられ、$X_2$上には$E^*$の点は含まれないようにできる。ただし$r$は$E^*$の点の数を示す。
このことから、$p^{-1}(X_1)^{A_4}$は、rだけで決まることがわかる。
また、$X_1 \cap X_2$はX_2の境界であるから、$\{p^{-1}(X_1 \cap X_2)\}^{A_4} \longrightarrow X_1 \cap X_2$は trivial $\mathbb{Z}_2$-bundle でなければならない。故にrは偶数でなければならない。そして、$p^{-1}(X_2)^{A_4}$の分類は Case 1 に帰

着するから、Mは $\{g, \varepsilon, r\}$ で分類される。

たしかに $\{g, \varepsilon, r\} = \{g', \varepsilon', r'\}$ ならば、$p^{-1}(X_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{r} D_i^*))^{A_4}$ と $p^{-1}(X_1' \cup (\bigcup_{i=1}^{r'} D_i'^*))^{A_4}$ ，$p^{-1}(X_2)^{A_4}$ と $p^{-1}(X_2')^{A_4}$ は同値であり、$p^{-1}(X_1)^{A_4}$ と $p^{-1}(X_2)^{A_4}$ のつなぎ合わせはMにかゝわりなく一意に定まる。故に、M^{A_4} と M'^{A_4} は同値，即ち、M とM′は同値である。逆も明らか。

これで定理3が証明された。



以上で、定理1～3の証明が与えられた訳ですが、紙数の都合で、途中、簡略になった箇所がありますが、ご斟酌下さい。

以　上

引用文献

[1] G.E. Bredon *Introduction to Compact Transformation Groups* Academic Press 1972

[2] K. Jänich *Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten* Springer-Verlag, No.59 1963

[3] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar *Combinatorial Group Theory* Interscience Publishers

[4] P. Orlik *Seifert Manifolds* Springer-Verlag, No.291

[5] P. Orlik, F. Raymond *Actions of SO(2) on 3-manifolds*, "Proc. Conf. Transformation Groups", New Orleans 1967. PP.297-318. Springer-Verlag, 1968

[6] R.W.Richardson *Actions of the Rotation Group on the 5 Sphere.* Annals of Math. vol.74